Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Piotr Dworczak
Nr albumu: 291564

Optymalne stałe w nierówności typu LlogL dla ciągłych martyngałów

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Adama Osękowskiego
Instytut Matematyki

Maj 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierujcego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Nierówność Dooba pozwala oszacować p-tą normę (dla $p > 1$) funkcji maksymalnej martyngału przez jego p-tą normę. Wykorzystując metodę funkcji specjalnych Burkholdera dowodzę analogicznej nierówności dla przypadku $p = 1$. Okazuje się, że nierówność staje się wówczas nierównością typu LlogL. Ponadto znajduję optymalne stałe i przedstawiam przykładowe zastosowanie nierówności do martyngału wykładniczego i procesów Bessela.

Słowa kluczowe

ciągły martyngał, nierówność Dooba, nierówność typu LlogL, optymalna stała, proces Wienera, wzór Itô, moment zatrzymania, martyngał wykładniczy, proces Bessela

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

60 Probability theory and stochastic processes
60G Stochastic processes
60G44 Martingales with continuous parameter

Tytuł pracy w języku angielskim

Optimal constants in a LlogL inequality for continuous martingales.

Spis treści

Wprowadzenie . . . 5

1. Definicje i podstawowe pojęcia . . . 7
- 1.1. Filtracje i martyngały . . . 7
- 1.2. Rozkład Dooba-Meyera i wzór Itô . . . 8

2. Nierówność Dooba i metoda Burkholdera . . . 11
- 2.1. Metoda funkcji specjalnych Burkholdera . . . 11
- 2.2. Nierówność Dooba . . . 12

3. Główne wyniki . . . 15
- 3.1. Dowód nierówności . . . 15
- 3.2. Optymalność stałych . . . 20

4. Zastosowania . . . 25
- 4.1. Martyngał wykładniczy . . . 25
- 4.2. Procesy Bessela . . . 27

Podsumowanie . . . 31

Bibliografia . . . 33

Wprowadzenie

Jednym z podstawowych narzędzi analizy stochastycznej jest nierówność Dooba. Nazwa nierówności pochodzi od nazwiska amerykańskiego matematyka, Josepha Leo Doob'a, który w znaczący sposób przyczynił się do rozwoju teorii procesów stochastycznych w pierwszej połowie XX-tego wieku (większość wyników z tego okresu zawarł on w swojej słynnej książce "Stochastic processes", [Doo53]). Nierówność Dooba pozwala szacować z góry p-tą normę (dla $p > 1$) supremum z wartości bezwzględnej procesu będącego martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem. Nierówność ta jest wykorzystywana między innymi w dowodzie twierdzenia o zbieżności martyngałów w L^p, ponadto często pozwala znajdywać całkowalne majoranty w celu zastosowania twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Jeżeli $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, to nierówność Dooba stwierdza, że dla dowolnego $p > 1$ zachodzi

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|X_t|^p. \tag{1}$$

Można postawić naturalne pytanie, czy nierówność (1) jest nadal prawdziwa, gdy $p = 1$. Odpowiedź jest negatywna, tzn. nie istnieje skończona stała C taka, że dla wszystkich ciągłych martyngałów zachodzi $\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t| \leqslant C\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|X_t|$.

Okazuje się jednak, że można uzyskać oszacowanie na wartość oczekiwaną supremum, jeżeli po prawej stronie nierówności pojawi się wyrażenie typu LlogL i dodatkowa stała. Ściślej, dla dowolnego $K > 1$ istnieje stała $L = L(K)$, zależna wyłącznie od K, o następującej własności. Jeżeli $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym (lub nieujemnym podmartyngałem lokalnym), to zachodzi

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t| \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + L(K), \tag{$\star$}$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Ponadto, przy nieco mocniejszych założeniach o procesie $(X_t)_{t\geqslant 0}$ zachodzi

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t| \leqslant K\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|X_t|\log|X_t| + L(K).$$

Nierówność ($\star$) jest przedmiotem tej pracy. Prezentuję dowód tej nierówności w oparciu o metodę zaproponowaną przez Burkholdera ([Bur91]), polegającą na konstrukcji funkcji specjalnych. Ponadto dla każdego $K > 1$ znajduję optymalną stałą $L(K)$, tzn. taką, że dla każdego $L' < L(K)$ nierówność ($\star$) ze stałą L' zamiast $L(K)$ nie zachodzi.

Praca jest zorganizowana w następujący sposób. Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszej części pracy. W rozdziale drugim przedstawiam dowód klasycznej nierówności Dooba i prezentuję na jego przykładzie metodę funkcji specjalnych Burkholdera, która zostanie użyta do dowodu głównego twierdzenia pracy. Rozdział trzeci obejmuje główne wyniki, to znaczy dowód nierówności ($\star$) oraz twierdzenie mówiące o optymalnych stałych w tejże nierówności. Rozdział czwarty zawiera przykładowe zastosowania wyników z rozdziału trzeciego. Ostatni rozdział podsumowuje rozważania z całej pracy.

Rozdział 1

Definicje i podstawowe pojęcia

W tym rozdziale prezentuję definicje pojęć i twierdzenia, które będą potrzebne w dalszej części pracy. Rozpoczniemy od definicji filtracji i martyngału.

1.1. Filtracje i martyngały

Do zdefiniowania martyngału niezbędne jest pojęcie filtracji.

Definicja 1.1. *Filtracją* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *przestrzeni probabilistycznej* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nazywamy rosnącą rodzinę* σ*-ciał zawartych w* $\mathcal{F}$*.*

Definicja 1.2. *Niech* $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ *będzie procesem stochastycznym. Filtracją generowaną przez* X *nazywamy rodzinę* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ *daną wzorem* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leqslant t)$*, gdzie* $\sigma(X)$ *oznacza* σ*-ciało generowane przez zmienną losową* X*.*

Zawsze, gdy w pracy odnoszę się do martyngału i nie podaję filtracji, należy zakładać, że rozpatrujemy ten martyngał względem naturalnej filtracji. Bardzo często w twierdzeniach wymaga się, by filtracja spełniała pewne dodatkowe warunki. Dlatego wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 1.3. *Powiemy, że filtracja* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *spełnia zwykłe warunki, jeśli:*

1. *jest prawostronnie ciągła, tzn. dla każdego* $t \geqslant 0$*,* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$*,*
2. *dla każdego* $t \geqslant 0$*,* $\mathcal{F}_t$ *zawiera wszystkie zbiory miary zero.*

Zauważmy, że filtracja generowana przez proces o prawostronnie ciągłych trajektoriach jest prawostronnie ciągła. Dysponując pojęciem filtracji możemy zdefiniować martyngał z czasem ciągłym.

Definicja 1.4. *Proces stochastyczny* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *jest martyngałem (odp. podmartyngałem, nadmartyngałem) względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$*, jeśli*

1. *dla każdego* $t \geqslant 0$*,* X_t *jest mierzalny względem* $\mathcal{F}_t$ *oraz* $\mathbb{E}|X_t| < \infty$*,*
2. *dla dowolnych* $t, s \geqslant 0$ *takich, że* $s < t, \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ *p.n. (odp.* $\geqslant$ *dla podmartyngału oraz* $\leqslant$ *dla nadmartyngału).*

Będziemy mówić, że martyngał jest ciągły, jeżeli z prawdopodobieństwem 1 jego trajektorie są ciągłymi funkcjami czasu. Najważniejszym przykładem ciągłego martyngału jest proces Wienera. Ponieważ będzie on odgrywał istotną rolę w dowodzie optymalności stałych, podaję jego pełną definicję.

Definicja 1.5. *Procesem Wienera (ruchem Browna) nazywamy proces stochastyczny* $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ *spełniający warunki*

1. $W_0 = 0$ *p.n.,*

2. W *ma przyrosty niezależne, tzn. dla dowolnych* $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n$ *zmienne losowe* $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *są niezależne,*

3. *dla dowolnych* $t \geqslant s \geqslant 0$ *zmienna* $W_t - W_s$ *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0, t-s)$*,*

4. *proces* W *jest ciągły.*

Kolejnym pojęciem, które posłuży do zdefiniowania martyngału loklanego, jest moment zatrzymania.

Definicja 1.6. *Momentem zatrzymania względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ *nazywamy zmienną losową* τ *o wartościach w* $[0, \infty]$ *taką, że* $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ *dla wszystkich* $t \geqslant 0$*.*

Dla martyngału $X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ i momentu zatrzymania τ możemy zdefiniować proces stochastyczny X^τ dany wzorem $X_t^\tau = X_{t \wedge \tau}$. Wówczas X^τ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$. Pozwala to wprowadzić następującą definicję.

Definicja 1.7. *Proces stochastyczny* $(X_t)_{t \geqslant 0}$ *jest martyngałem lokalnym (odp. podmartyngałem, nadmartyngałem lokalnym) względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$*, jeśli istnieje ciąg momentów zatrzymania* $\tau_n \nearrow \infty$ *taki, że dla każdego* n *proces* X^{τ_n} *jest martyngałem (odp. podmartyngałem, nadmartyngałem) względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$*.*

Uogólnieniem pojęcia martyngału lokalnego jest pojęcie semimartyngału, które okaże się użyteczne przy formułowaniu twierdzenia Itô. Najpierw będziemy jednak potrzebowali jeszcze jednej definicji procesów.

Definicja 1.8. *Niech* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ *będzie filtracją. Powiemy, że proces stochastyczny* $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ *należy do klasy* $\mathcal{V}^c$*, jeżeli jest adaptowalny do filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$ *(tzn. dla każdego* $t \geqslant 0$ *zmienna* A_t *jest* $\mathcal{F}_t$*-mierzalna), ciągły oraz ma wahanie skończone na każdym przedziale* $[0, t]$*, tzn. dla każdego* $t \geqslant 0$

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n = t \right\} < \infty.$$

Definicja 1.9. *Proces stochastyczny* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *nazywamy ciągłym semimartyngałem względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$*, jeżeli da się przedstawić w postaci* $X = X_0 + M + A$*, gdzie* X_0 *jest zmienną losową* $\mathcal{F}_0$*-mierzalną,* M *- ciągłym martyngałem lokalnym względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$*, a* $A \in \mathcal{V}^c$*.*

1.2. Rozkład Dooba-Meyera i wzór Itô

W tym podrozdziale sformułuję dwa podstawowe twierdzenia analizy stochastycznej, na które będę się powoływał w dalszej części pracy. Twierdzenie o istnieniu dekompozycji Dooba-Meyera podam w sformułowaniu nieco ogólniejszym niż potrzebne w pracy. W tym celu należy wprowadzić jedną dodatkową definicję.

Definicja 1.10. *Niech* $\mathcal{T}$ *będzie zbiorem wszystkich skończonych p.n. momentów zatrzymania (względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$*). Proces* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *o prawostronnie ciągłych trajektoriach jest w klasie DL, jeżeli rodzina* $(X_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ *jest jednostajnie całkowalna.*

Twierdzenie 1.1. *[Dekompozycja Dooba-Meyera] Niech filtracja* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *spełnia zwykłe warunki. Każdy podmartyngał* $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *o prawostronnie ciągłych trajektoriach z klasy DL daje się jednoznacznie zapisać jako suma*

$$X = M + A,$$

gdzie $(M_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *jest martyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach,* $M_0 = 0$*, a* $(A_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem adaptowalnym do filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *i niemalejącym.*

Dowód. Zobacz [Kar91]. □

W pracy będę stosował dekompozycję Dooba-Meyera jedynie do nieujemnych podmartyngałów lokalnych. Zachodzą następujące proste fakty, których dowody można znaleźć w [Kar91].

Fakt 1.1. *Każdy nieujemny podmartyngał o prawostronnie ciągłych trajektoriach jest w klasie DL.*

Fakt 1.2. *Jeżeli* $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *jest nieujemnym i ciągłym podmartyngałem,* $X = M + A$ *tak jak w dekompozycji Dooba-Meyera, to zarówno martyngał* M*, jak i proces* A *są ciągłe.*

Zauważmy też, że dekompozycję Dooba-Meyera można przeprowadzić dla podmartyngału lokalnego, otrzymując wtedy w tezie rozkład na proces niemalejący i martyngał lokalny.

Dekompozycja Dooba-Meyera pozwala w szczególności na wprowadzenie definicji nawiasu skośnego.

Definicja 1.11. *Niech* $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *będzie martyngałem (lokalnym). Wówczas nawiasem skośnym martyngału* X *nazywamy proces* $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geqslant 0}$ *ciągły, niemalejący,* $\langle X\rangle_0 = 0$ *oraz taki, że* $\left(X_t^2 - \langle X\rangle_t,\, \mathcal{F}_t\right)_{t\geqslant 0}$ *jest martyngałem (lokalnym). Proces* $\langle X\rangle$ *jest wyznaczony jednoznacznie.*

Jeżeli $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym semimartyngałem, $X = X_0 + M + A$, gdzie M jest częścią martyngałową, to przyjmujemy $\langle X\rangle = \langle M\rangle$. Jeżeli $(Y_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym semimartyngałem, $Y = Y_0 + N + B$, gdzie N jest częścią martyngałową, to definiujemy nawias skośny procesów X i Y jako $\langle X,\, Y\rangle = \langle M,\, N\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle\right]$.

Twierdzenie 1.2. *[Wzór Itô] Załóżmy, że* $f : G \to \mathbb{R}$ *(*$G \subseteq \mathbb{R}^d$*, otwarty) jest funkcją klasy* C^2 *oraz* $X = (X^{(1)}, ..., X^{(d)})$*, gdzie* $X^{(i)} = X_0^{(i)} + M^{(i)} + A^{(i)}$ *są ciągłymi semimartyngałami dla* $i = 1,\, 2, ...,\, d$*. Wówczas* $f(X)$ *jest semimartyngałem oraz*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s)dX_s^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Z_s)d\left\langle M^{(i)},\, M^{(j)}\right\rangle_s .$$

Dowód. Zobacz [Lat11]. □

Definicje i własności całek stochastycznych występujących we wzorze Itô (tzn. całki z procesu stochastycznego względem lokalnego martyngału oraz całki Lebesgue'a-Stieltjesa względem procesu o wahaniu skończonym) nie będą prezentowane w tej pracy. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do [Lat11].

Rozdział 2

Nierówność Dooba i metoda Burkholdera

2.1. Metoda funkcji specjalnych Burkholdera

W tym podrozdziale prezentuję metodę dowodzenia nierówności dla martyngałów zaproponowaną przez Burkholdera ([Bur91]). Metoda ta zostanie najpierw użyta w dowodzie klasycznej nierówności Dooba (w celu zobrazowania jej działania na prostym przykładzie), a następnie w głównym dowodzie pracy do wykazania nierówności ($\star$). Metodę funkcji specjalnych można stosować zarówno do procesów z czasem ciągłym, jak i z czasem dyskretnym. Dla zachowania spójności pracy, skupiam się na procesach z czasem ciągłym.

Wiele nierówności, w których występują martyngały i ich normy, można zapisać w postaci $\mathbb{E}V(X_t) \leqslant L$, gdzie V jest funkcją rzeczywistą określoną na podzbiorze $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $X = (X_t)_{t\geqslant 0} = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, ..., X_t^{(d)})_{t\geqslant 0}$ jest pewnym d-wymiarowym procesem stochastycznym, a L stałą. Pierwszym krokiem w metodzie Burkholdera jest zatem sprowadzenie nierówności do takiej postaci. Następnie szukamy funkcji $U : S \to \mathbb{R}$ o następujących trzech własnościach:

- dla każdego $x \in S,\ V(x) \leqslant U(x)$,
- $(U(X_t))_{t\geqslant 0}$ jest nadmartyngałem,
- $\mathbb{E}U(X_0) \leqslant L$.

Z pierwszej własności natychmiast wynika, że $\mathbb{E}V(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_t)$, z drugiej zaś, że $\mathbb{E}U(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_0)$. Mamy zatem ciąg oszacowań $\mathbb{E}V(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_0) \leqslant L$, który daje wyjściową nierówność i kończy dowód. Główny ciężar dowodu skupia się zatem na znalezieniu odpowiedniej funkcji (specjalnej) U.

Zauważmy, że w celu uzyskania dowodzonej nierówności z optymalnym stałymi, należy zadbać, by dla pewnego procesu X w ciągu nierówności $\mathbb{E}V(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_t) \leqslant \mathbb{E}U(X_0) \leqslant L$ zachodziły równości. O ile równość nie jest przyjmowana dla pewnego trywialnego procesu (np. stałego w czasie), to funkcję U należy dobrać tak, żeby pokrywała się z funkcją V na pewnym (niezbyt małym) zbiorze i żeby $(U(X_t))_{t\geqslant 0}$ było martyngałem. Dla nierówności, w której występują procesy ciągłe, użytecznym narzędziem dowodzenia, że $(U(X_t))_{t\geqslant 0}$ jest (nad)martyngałem, jest wzór Itô. Wówczas bowiem własność bycia (nad)martyngałem sprowadza się do odpowiednich własności pochodnych funkcji U. Z kolei dekompozycja Dooba-Meyera pozwala na pokazanie, że dany proces jest semimartyngałem, w związku z czym użycie wzoru Itô jest uzasadnione.

2.2. Nierówność Dooba

Dowód nierówności Dooba metodą funkcji specjalnych poprzedzę technicznym lematem, który będzie wielokrotnie wykorzystany w dalszej części pracy.

Lemat 2.1. *Niech* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$, $U : S \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą taką, że dla wszystkich* $y \geqslant 0$ *zachodzi* $U(y,y) = 0$ *oraz* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą i* $f^\star(t) = \sup_{s\leqslant t} |f(s)|$. *Wówczas*

$$\int_0^T U\left(f(t),\, f^\star(t)\right) df^\star(t) = 0.$$

Dowód. Z definicji całki Stieltjesa mamy (całka jest dobrze określona, bo $U\left(f(t),\, f^\star(t)\right)$ jest funkcją ciągłą, jako złożenie funkcji ciągłych, a $f^\star$ ma skończone wahanie na przedziale ograniczonym $[0,\,T]$ jako funkcja niemalejąca)

$$\int_0^T U\left(f(t),\, f^\star(t)\right) df^\star(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2^n} U\left(f(t_j^n),\, f^\star(t_j^n)\right)\left(f^\star\left(\frac{jT}{2^n}\right) - f^\star\left(\frac{(j-1)T}{2^n}\right)\right),$$

gdzie $t_j^n \in [\frac{(j-1)T}{2^n},\, \frac{jT}{2^n}]$ (t_j^n można wybrać jako dowolną liczbę z tego przedziału). Ustalmy n. Ponieważ $f^\star$ jest niemalejąca, to albo $f^\star\left(\frac{jT}{2^n}\right) = f^\star\left(\frac{(j-1)T}{2^n}\right)$, albo $f^\star\left(\frac{jT}{2^n}\right) > f^\star\left(\frac{(j-1)T}{2^n}\right)$ i wtedy istnieje $s_j \in [\frac{(j-1)T}{2^n},\, \frac{jT}{2^n}]$ takie, że $f^\star(s_j) = f(s_j)$. Przyjmując $t_j^n = s_j$, gdy $f^\star\left(\frac{jT}{2^n}\right) > f^\star\left(\frac{(j-1)T}{2^n}\right)$ oraz $t_j^n = \frac{jT}{2^n}$ w przeciwnym przypadku oraz korzystając z założenia $U(y,\,y) = 0$ otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^{2^n} U\left(f(t_j^n),\, f^\star(t_j^n)\right)\left(f^\star\left(\frac{jT}{2^n}\right) - f^\star\left(\frac{(j-1)T}{2^n}\right)\right) = 0.$$

Ponieważ rozumowanie to możemy powtórzyć dla dowolnego n, a całka nie zależy od wyboru podziałów $[0,\,T]$ i punktów t_j^n, to mamy

$$\int_0^T U\left(f,\, f^\star\right) df^\star = 0.$$

□

Ponieważ dowód nierówności Dooba służy tylko zobrazowaniu metody Burkholdera, to twierdzenie formułuję przy mocniejszych niż zwykle założeniach.

Twierdzenie 2.1. *[Nierówność Dooba]. Niech* $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *będzie ciągłym, nieujemnym martyngałem i niech* $p > 1$. *Wówczas*

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0} X_t^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}X_t^p.$$

Dowód. Krok 1 (wyrażenie nierówności w postaci $\mathbb{E}V(X_t) \leqslant L$). Niech $q = \frac{p}{p-1}$. Niech $S = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$. Definiujemy funkcję $V : S \to \mathbb{R}$ wzorem $V(x,y) = y^p - q^p x^p$. Niech $X_t^\star = \sup_{s\leqslant t} |X_s|$. Wówczas $\mathbb{E}V(X_t,\, X_t^\star) = \mathbb{E}\,(X_t^\star)^p - \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}X_t^p$. Jeżeli pokażemy, że

$\mathbb{E}V(X_t,\, X_t^\star) \leqslant 0$, to biorąc supremum po $t \geqslant 0$ obu stron nierówności $\mathbb{E}\,(X_t^\star)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}X_t^p$ otrzymamy tezę.

Krok 2 (znalezienie funkcji specjalnej U). Niech $U(x,y) = py^{p-1}(y - qx)$ na S. Pokażemy, że U spełnia trzy wymagane warunki.

- Pokażę, że $U(x,\, y) \geqslant V(x,\, y)$ dla $(x,y) \in S$. Zauważmy, że przy ustalonym y, $U(x,\, y)$ jest wklęsłą funkcją x, a $V(x,y)$ jest liniową funkcją x. Wobec tego wystarczy pokazać, że dla każdego y istnieje punkt $y_0 \in [0,\, y]$ taki, że $U(y_0,\, y) = V(y_0,\, y)$ oraz $U_x(y_0,\, y) = V_x(y_0,\, y)$. Niech $y_0 = \frac{y}{q}$. Wówczas $U(y_0,\, y) = 0 = V(y_0,\, y)$ oraz $U_x(y_0,\, y) = -pqy^{p-1} = V_x(y_0,\, y)$.

- Pokażę, że $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Oczywiście procesy $(X_t)_{t\geqslant 0}$, $(X_t^\star)_{t\geqslant 0}$ są ciągłymi semimartyngałami (względem naturalnej filtracji; proces $(X_t^\star)_{t\geqslant 0}$ jest niemalejący, więc jest procesem z klasy $\mathcal{V}^c$), a funkcja U jest klasy C^2 na S. Wzór Itô daje zatem (zauważmy, że $\langle X_t^\star\rangle = 0$, $\langle X_t^\star,\, X_t\rangle = 0$)

$$U(X_t,\, X_t^\star) = U(X_0,\, X_0) - \int\limits_0^t pq\,(X_s^\star)^{p-1}\, dX_s + p^2 \int\limits_0^t \left[(X_s^\star)^{p-1} - X_s\,(X_s^\star)^{p-2}\right] dX_s^\star.$$

  Proces $(\int_0^t pq\,(X_s^\star)^{p-1}\, dX_s)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem[1], natomiast funkcja pod drugą całką znika dla $X_s = X_s^\star$. Ponieważ całka względem procesu niemalejącego jest zdefiniowana jako całka Lebesgue'a-Stieltjesa (dla każdego $\omega \in \Omega$), to na mocy Lematu 2.1 $\int_0^t \left[(X_s^\star)^{p-1} - X_s\,(X_s^\star)^{p-2}\right] dX_s^\star = 0$. Wobec tego

$$U(X_t,\, X_t^\star) = U(X_0,\, X_0) - \int\limits_0^t pq\,(X_s^\star)^{p-1}\, dX_s,$$

  czyli $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem.

- $U(X_0,\, X_0^\star) = U(X_0,\, X_0)$. Dla funkcji U mamy ogólnie

$$U(x,\, x) = px^p - pqx^p = px^p(1 - \frac{p}{p-1}) = -\frac{p}{p-1}x^p \leqslant 0$$

  dla $x \geqslant 0$. Wobec tego $\mathbb{E}U(X_0,\, X_0^\star) \leqslant 0$.

Krok 3. Na mocy powyższego dostajemy ciąg nierówności $\mathbb{E}V(X_t,\, X_t^\star) \leqslant \mathbb{E}U(X_t,\, X_t^\star) = \mathbb{E}V(X_0,\, X_0^\star) \leqslant 0$, co kończy dowód. □

[1] Formalnie, proces ten jest martyngałem lokalnym, ale można uczynić z niego martyngał przez zastosowanie standardowej techniki lokalizacyjnej. Dla przejrzystości dowodu, który służy jedynie zobrazowaniu metody, pomijam techniczne szczegóły. W dowodzie głównej nierówności $(\star)$ lokalizacja zostanie w pełni sformalizowana.

Rozdział 3

Główne wyniki

3.1. Dowód nierówności

Dowód głównej nierówności przebiega według schematu zaprezentowanego w poprzednim rozdziale, przy czym nie rozróżniam już formalnie kolejnych kroków. Pierwsze twierdzenie obejmuje dwa przypadki, gdyż ich dowód jest bardzo podobny.

Twierdzenie 3.1. *(1) Niech $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ będzie nieujemnym, ciągłym podmartyngałem lokalnym, $X^\star = \sup_{t\geqslant 0} |X_t|$, $K > 1$. Wówczas*

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}X_\tau \log X_\tau + L,$$

gdzie $L = L(K) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$ oraz $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

(2) Jeżeli założymy dodatkowo, że $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest nieujemnym, ciągłym martyngałem całkowalnym z kwadratem, który spełnia dla każdego $t \geqslant 0$

$$\mathbb{E}\langle X_t\rangle^2 < \infty,$$

to zachodzi silniejsza nierówność

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K \sup_{t\geqslant 0} \mathbb{E}X_t \log X_t + L.$$

Dowód. Niech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leqslant y\}$. Zdefiniujmy funkcję $V : S \to \mathbb{R}$ wzorem

$$V(x, y) = \begin{cases} y - Kx\log x, & \text{dla } x \neq 0 \\ y, & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

Pokażę, że (po ewentualnej lokalizacji) dla wszystkich $t \geqslant 0$ zachodzi

$$\mathbb{E}V(X_t,\, X_t^\star) \leqslant L.$$

Wówczas rozpisując funkcję V, biorąc supremum obu stron po $\tau \in \mathcal{T}$ i przechodząc z t do nieskończoności, dostaniemy tezę.

Zdefiniujmy teraz funkcję $U : S \to \mathbb{R}$ wzorem

$$U(x,\, y) = \begin{cases} K(y - x) - Kx\log\frac{K-1}{K}y, & \text{dla } y \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e} \\ \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}, & \text{dla } y < \frac{K}{K-1}\frac{1}{e} \end{cases}.$$

Łatwo sprawdzić, że U jest ciągła na S. Okazuje się, że $U(x,\, y) \geqslant V(x,\, y)$ na S. Techniczny dowód tego faktu został przeniesiony do Lematu 3.1.

Pokażę teraz, że $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest nadmartyngałem lokalnym. Korzystając z rozkładu Dooba-Meyera możemy zapisać $X_t = M_t + A_t$, gdzie M jest martyngałem lokalnym startującym z 0, a A jest adaptowalnym i niemalejącym procesem. Wobec tego $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym semimartyngałem. Ponadto $(X_t^\star)_{t\geqslant 0}$ jest semimartyngałem, ponieważ jest to proces adaptowalny i niemalejący (jego część martyngałowa jest zerowa). Funkcja U nie jest klasy C^2 na całym S, ale jest klasy C^2 wzdłuż trajektorii dwuwymiarowego procesu $((X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$, wobec tego można zastosować wzór Itô[1]. Zauważmy, że $\langle X_t^\star \rangle = 0$ oraz $\langle X_t,\, X_t^\star \rangle = 0$, zatem

$$U(X_t,\, X_t^\star) = U(X_0,\, X_0) + \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s + \int_0^t U_y(X_s,\, X_s^\star)dX_s^\star + \frac{1}{2}\int_0^t U_{xx}(X_s,\, X_s^\star)d\langle M\rangle_s. \quad (3.1)$$

Proces $(\int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym, $U_{xx}(X_s,\, X_s^\star) = 0$. Do całki $\int_0^t U_y(X_s,\, X_s^\star)dX_s^\star$ stosujemy Lemat 2.1:

$$U_y(X_s^\star,\, X_s^\star) = K - K\frac{X_s^\star}{X_s^\star} = 0,$$

zatem $\int_0^t U_y(X_s,\, X_s^\star)dX_s^\star = 0$. Stąd

$$U(X_t,\, X_t^\star) = \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s.$$

Korzystając z definicji martyngału lokalnego, możemy teraz przeprowadzić lokalizację: wybierzmy ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \infty$ taki, że proces $(\int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Otrzymujemy

$$U(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) = \int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s.$$

Dla s takich, że $X_s^\star < \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$, funkcja pod drugą całką jest zerowa. W przeciwnym przypadku

$$U_x(X_s,\, X_s^\star) = -K - K\log\left(\frac{K-1}{K}X_s^\star\right) \leqslant -K\left(1 + \log\frac{K-1}{K}\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}\right) \leqslant 0.$$

Ponieważ proces A jest niemalejący, to całka $\int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s$ jest niedodatnia. Stąd, dla $t > u$,

$$\mathbb{E}\left(U(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star)|\mathcal{F}_u\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s|\mathcal{F}_u\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s|\mathcal{F}_u\right)$$

$$= \int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \mathbb{E}\left(\int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s|\mathcal{F}_u\right) + \mathbb{E}\left(\int_{u\wedge\tau_n}^{t\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s|\mathcal{F}_u\right)$$

[1]Dokładna inspekcja dowodu wzoru Itô pokazuje, że założenie o klasie C^2 na całej dziedzinie nie jest konieczne, wystarczy, że pochodne do drugiego rzędu są ciągłe wzdłuż trajektorii rozpatrywanego procesu.

$$\leqslant \int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \mathbb{E}\left(\int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s|\mathcal{F}_u\right)$$

$$= \int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \int_0^{u\wedge\tau_n} U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s = U(X_{u\wedge\tau_n},\, X_{u\wedge\tau_n}^\star),$$

czyli rzeczywiście $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest nadmartyngałem lokalnym. W szczególności

$$\mathbb{E}U(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) \leqslant \mathbb{E}U(X_0,\, X_0^\star) = \mathbb{E}U(X_0,\, X_0).$$

Ponieważ $V(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) \leqslant U(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star)$, to

$$\mathbb{E}V(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) \leqslant \mathbb{E}U(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) \leqslant \mathbb{E}U(X_0,\, X_0).$$

Nietrudno wykazać, że $\mathbb{E}U(X_0,\, X_0) \leqslant L$. Wystarczy w tym celu udowodnić, że

$$\sup_{x\geqslant 0} U(x,\, x) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Oczywiście jest tak, jeżeli rozpatrzymy jedynie $x < \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$. Dla $x \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$ zdefiniujmy $f(x) := U(x,\, x) = -Kx\log\left(\frac{K-1}{K}x\right)$. Funkcja f jest ściśle malejąca dla $x \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$, zatem maksimum jest osiągane w punkcie $\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$ i wynosi $\frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$. Otrzymaliśmy zatem $\mathbb{E}V(X_{t\wedge\tau_n},\, X_{t\wedge\tau_n}^\star) \leqslant L$.

Korzystając z definicji funkcji V zapisujemy ostatnią nierówność jako

$$\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}^\star \leqslant K\,\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}\log X_{t\wedge\tau_n} + L.$$

Ponieważ $t\wedge\tau_n$ jest ograniczonym momentem zatrzymania, to prawą stronę nierówności szacujemy trywialnie przez supremum po $\tau\in\mathcal{T}$

$$\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}^\star \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}X_\tau\log X_\tau + L.$$

Nierówność zachodzi dla wszystkich n i $t \geqslant 0$, więc po lewej stronie możemy przejść do granicy z n i t. Ponieważ proces $(X_t^\star)_{t\geqslant 0}$ jest rosnący p.n., ciąg momentów zatrzymania τ_n jest rosnący p.n. i zbiega do nieskończoności, to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej mamy

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_{t\wedge\tau_n}^\star = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}X_t^\star = \mathbb{E}X^\star.$$

Otrzymaliśmy więc ostatecznie

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}X_\tau\log X_\tau + L,$$

co kończy dowód pierwszej częsci twierdzenia.

Aby udowodnić drugą część, zauważmy, że przy założeniach twierdzenia proces $(\int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s)_{0\leqslant t\leqslant T}$ dla dowolnego $T < \infty$ jest martyngałem. Rzeczywiście, skoro $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem całkowalnym z kwadratem, to przede wszystkim $X = M$ oraz proces $(\int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dX_s)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest martyngałem, o ile

$$\mathbb{E}\int_0^T [U_x(X_s,\, X_s^\star)]^2 d\langle X_s\rangle < \infty.$$

Ponieważ $[U_x(X_s,\, X_s^\star)]^2 = K^2\left(1+\log\frac{K-1}{K}X_s^\star\right)^2$ i dla dostatecznie dużego M zachodzi dla $X_s^\star \geqslant M$ nierówność $\left(1+\log\frac{K-1}{K}X_s^\star\right)^2 \leqslant X_s^\star$, to wystarczy wykazać, że

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T \left(1+\log\frac{K-1}{K}X_s^\star\right)^2 \mathbb{I}_{(X_s^\star \leqslant M)} d\langle X_s\rangle < \infty$$

oraz

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T X_s^\star d\langle X_s\rangle < \infty.$$

Pierwsza nierówność sprowadza się do

$$\mathbb{E}\langle X_T\rangle < \infty.$$

Do drugiej nierówności stosujemy najpierw nierówność Schwarza, a następnie nierówność Burkholdera-Davisa-Gundy'ego[2], otrzymując dla pewnej stałej C

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T X_s^\star d\langle X_s\rangle \leqslant \mathbb{E}X_T^\star \int\limits_0^T d\langle X_s\rangle = \mathbb{E}X_T^\star\langle X_T\rangle \overset{\text{Schwarz}}{\leqslant} \sqrt{\mathbb{E}X_T^{\star 2}}\sqrt{\mathbb{E}\langle X_T\rangle^2} \overset{\text{B-D-G}}{\leqslant} C\sqrt{\mathbb{E}\langle X_T\rangle}\sqrt{\mathbb{E}\langle X_T\rangle^2}$$

Ponieważ założyliśmy całkowalność z kwadratem nawiasu skośnego dla każdego $t \geqslant 0$, to rzeczywiście zachodzi

$$\mathbb{E}\int\limits_0^T [U_x(X_s,\, X_s^\star)]^2 d\langle X_s\rangle < \infty$$

i $(\int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dX_s)_{0\leqslant t\leqslant T}$ jest martyngałem. Możemy zatem powtórzyć rozumowanie z dowodu części pierwszej nie stosując lokalizacji. Otrzymujemy dla każdego $t \geqslant 0$

$$\mathbb{E}V(X_t,\, X_t^\star) \leqslant L.$$

Rozpisując funkcję V z definicji, biorąc supremum po $t \geqslant 0$ i stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, otrzymujemy tezę.

□

Lemat 3.1. *W oznaczeniach z dowodu Twierdzenia 3.1, $U(x,\, y) \geqslant V(x,\, y)$ na zbiorze S.*

Dowód. Dla $y < \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$ wystarczy udowodnić, że

$$\sup_{0<x\leqslant y<\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}} (y - Kx\log x) \leqslant \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Zachodzi

$$\sup_{0<x\leqslant y<\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}} (y - Kx\log x) = \sup_{0<x<\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}} \left(\frac{K}{K-1}\frac{1}{e} - Kx\log x\right)$$

[2]Zobacz: Twierdzenie 4.1 w rozdziale IV str. 160 w [Rev99]. Co prawda w twierdzeniu tym jest wymagane, by martyngał $(X_t)_{t\geqslant 0}$ startował z 0, ale przy naszym założeniu o całkowalności z kwadratem nie odgrywa to żadnej roli, bo zawsze możemy przejść do rozważania procesu $(X_t - X_0)_{t\geqslant 0}$.

$$= \frac{K}{K-1}\frac{1}{e} - \inf_{0<x<\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}} Kx\log x = \frac{K}{K-1}\frac{1}{e} - K\frac{1}{e}\log\frac{1}{e} = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Teraz dla $y \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$ musimy pokazać, że dla wszystkich $0 \leqslant x \leqslant y$,

$$K(y-x) - Kx\log\frac{K-1}{K}y \geqslant y - Kx\log x.$$

Równoważnie dla wszystkich $0 \leqslant x \leqslant y$,

$$(K-1)y \geqslant g_y(x) := Kx\left(1 + \log\frac{K-1}{K}\frac{y}{x}\right).$$

Funkcja $g_y(x)$ jest różniczkowalna i $g_y'(x) = K\left(1 + \log\frac{K-1}{K}\frac{y}{x}\right) - K = K\log\frac{K-1}{K}\frac{y}{x}$. Zatem funkcja $g_y(x)$ rośnie na zbiorze $[0,\, \frac{K-1}{K}y]$ i maleje na zbiorze $[\frac{K-1}{K}y,\, y]$, więc maksimum jest przyjmowane w $x = \frac{K-1}{K}y$ i wynosi $g_y(\frac{K-1}{K}y) = (K-1)y$. Stąd

$$(K-1)y = \sup_{x\in[0,\,y]} g_y(x) \geqslant g_y(x),$$

co kończy dowód.

□

Dysponując Twierdzeniem 3.1 możemy bez trudu udowodnić nierówność $(\star)$ dla ciągłych martyngałów lokalnych.

Twierdzenie 3.2. *Niech $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ będzie ciągłym martyngałem lokalnym, $X^\star = \sup_{t\geqslant 0}|X_t|$, $K > 1$. Wówczas*

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + L, \tag{3.2}$$

gdzie $L = L(K) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$ oraz $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Dowód. Jeżeli $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym, to $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ jest nieujemnym podmartyngałem lokalnym. Istotnie, istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \infty$ taki, że $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Stosując nierówność Jensena dla warunkowej wartości oczekiwanej i wypukłej funkcji $|\cdot|$ otrzymujemy dla dowolnego $t > s$

$$\mathbb{E}\left(|X_{t\wedge\tau_n}|\,|\,\mathcal{F}_s\right) \geqslant |\mathbb{E}\left(X_{t\wedge\tau_n}|\,\mathcal{F}_s\right)| = |X_{s\wedge\tau_n}|.$$

Stąd $(|X_{t\wedge\tau_n}|)_{t\geqslant 0}$ jest podmartynagłem, czyli $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ jest podmartyngałem lokalnym. Można zatem zastosować Twierdzenie 3.1 do procesu $(|X_t|)_{t\geqslant 0}$ otrzymując nierówność

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + L.$$

□

3.2. Optymalność stałych

Okazuje się, że stała $L(K)$ otrzymana w Twierdzeniu 3.2 jest optymalna. Ponadto nierówność $(\star)$ nie zachodzi dla $K \leqslant 1$. Mówią o tym dwa kolejne twierdzenia.

Twierdzenie 3.3. *Stała L w nierówności* (3.2) *jest optymalna. Ściślej, dla każdego $K > 1$ i każdej stałej $L' < L(K) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$ istnieje taki ciągły martyngał $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, że zachodzi*

$$\mathbb{E}X^\star > K \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log|X_\tau| + L',$$

gdzie $L = L(K) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$ oraz $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Dowód. Wystarczy wskazać dla każdego $K > 1$ taki martyngał $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, który daje równość w nierówności (3.2) (przy czym obie strony muszą być skończone). Niech $(W_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera z naturalną filtracją. Następnie, niech $X_t = \frac{K}{K-1}\frac{1}{e} + W_t$ i niech $\tau = \inf\left\{t \geqslant 0 :\, X_t^\star = \frac{K}{K-1}X_t\right\}$. Zmienna losowa τ jest momentem zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ oraz $\tau < \infty$ p.n. Ostatnia własność wynika z faktu, że proces Wienera przyjmuje z prawdopodobieństwem 1 dla pewnego $t > 0$ wartość $-\frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$. Zachodzi $X_0^\star < \frac{K}{K-1}X_0$ oraz dla pewnego $t_0 > 0$ $X_{t_0} = 0$ (wobec czego $X_{t_0}^\star > 0 = \frac{K}{K-1}X_{t_0}$). Z ciągłości procesu Wienera istnieje $t_1 \in (0,\, t_0)$ takie, że $X_{t_1}^\star = \frac{K}{K-1}X_{t_1}$.

Oczywiście $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem, zatem $(X_{t\wedge\tau},\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ jest również ciągłym martyngałem. Pokażę, że proces X^τ osiąga równość w nierówności (3.2).

Nierówność

$$\mathbb{E}\,(X^\tau)^\star \geqslant K \sup_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_{\sigma\wedge\tau}| \log|X_{\sigma\wedge\tau}| + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e} \tag{3.3}$$

wynika z nierówności

$$\mathbb{E}V(X_\tau,\, X_\tau^\star) \geqslant \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}, \tag{3.4}$$

gdzie V jest funkcją z dowodu Twierdzenia 3.1.

Aby to pokazać, zauważmy po pierwsze, że trajektorie procesu $((X_{t\wedge\tau},\, X_{t\wedge\tau}^\star))_{t\geqslant 0}$ są zawarte w zbiorze $S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 :\, \frac{K-1}{K}y \leqslant x \leqslant y\}$, a zatem proces X^τ przyjmuje jedynie nieujemne wartości i można pominąć moduły w nierówności (3.3). Po drugie,

$$\mathbb{E}\,(X^\tau)^\star = \mathbb{E}\left(\sup_{t\geqslant 0} X_{t\wedge\tau}\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} X_t\right) = \mathbb{E}\,(X^\star)_\tau = \mathbb{E}X_\tau^\star.$$

Po trzecie, zachodzi

$$\sup_{\sigma\in\mathcal{T}} \mathbb{E}X_{\sigma\wedge\tau} \log X_{\sigma\wedge\tau} \leqslant \mathbb{E}X_\tau \log X_\tau. \tag{3.5}$$

Rzeczywiście, funkcja $F(x) = x\log x$ jest wypukła dla $x \geqslant 0$ (druga pochodna jest równa $\frac{1}{x}$), więc z nierówności Jensena zachodzi dla dowolnego $\sigma \in \mathcal{T}$

$$\mathbb{E}\,(X_\tau \log X_\tau | \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}) = \mathbb{E}\,(F(X_\tau)|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}) \geqslant F\,(\mathbb{E}\,(X_\tau|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau})) = F\,(X_{\sigma\wedge\tau}) = X_{\sigma\wedge\tau} \log X_{\sigma\wedge\tau}.$$

Biorąc wartość oczekiwaną obu stron nierówności dostajemy

$$\mathbb{E}X_\tau \log X_\tau \geqslant \mathbb{E}X_{\sigma\wedge\tau} \log X_{\sigma\wedge\tau}.$$

Z dowolności σ wynika nierówność (3.5).

Tym samym pokazaliśmy, że nierówność (3.3) jest równoważna nierówności

$$\mathbb{E}X_\tau^\star \geqslant K\,\mathbb{E}X_\tau \log X_\tau + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Korzystając z definicji funkcji V i liniowości wartości oczekiwanej otrzymujemy natychmiast nierówność (3.4), której udowodnienie zakończy dowód twierdzenia.

Zauważmy, że prawie na pewno zachodzi $X_\tau^\star = \frac{K}{K-1}X_\tau$ a funkcje $V(x,y)$ i $U(x,y)$ zdefiniowane w dowodzie Twierdzenia 3.1 pokrywają się na zbiorze $y = \frac{K}{K-1}x$ dla $y \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$. Mamy bowiem $V(x,\, \frac{K}{K-1}x) = \frac{K}{K-1}x - Kx\log x = K(\frac{K}{K-1}x - x) - Kx\log x = U(x,\, \frac{K}{K-1}x)$. Ponadto dla każdego $t \geqslant 0$ zachodzi $X_{\tau\wedge t}^\star \geqslant \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}$. Stąd

$$\mathbb{E}V(X_\tau,\, X_\tau^\star) = \mathbb{E}U(X_\tau,\, X_\tau^\star) = \mathbb{E}\left[U(X,\, X^\star)\right]_\tau. \tag{3.6}$$

Proces $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym. Wynika to z faktu, że podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 3.1 wzór Itô daje

$$U(X_t,\, X_t^\star) = \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dM_s + \int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s,$$

ale tym razem proces $(A_t)_{t\geqslant 0}$ jest stały, bo $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem. Wobec tego $\int_0^t U_x(X_s,\, X_s^\star)dA_s = 0$ i $(U(X_t,\, X_t^\star))_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym.

Zastosujemy teraz twierdzenie Dooba do martyngału $(U(X_{t\wedge\sigma_n},\, X_{t\wedge\sigma_n}^\star))_{t\geqslant 0}$ (gdzie σ_n jest ciągiem lokalizującym) i dwóch ograniczonych momentów zatrzymania $\tau\wedge n$ i 0 (dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$). Otrzymujemy

$$\mathbb{E}\left[U(X,\, X^\star)\right]_{\tau_n} = \mathbb{E}\left[U(X,\, X^\star)\right]_0, \tag{3.7}$$

gdzie $\tau_n = \tau\wedge n\wedge\sigma_n$ jest ciągiem momentów zatrzymania rosnącym p.n. do τ. Łatwe obliczenie daje

$$\mathbb{E}U(X_0,\, X_0^\star) = U(\frac{K}{K-1}\frac{1}{e},\, \frac{K}{K-1}\frac{1}{e}) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}. \tag{3.8}$$

Z drugiej strony

$$\mathbb{E}\left[U(X,\, X^\star)\right]_{\tau_n} = \mathbb{E}\left[K(X_{\tau_n}^\star - X_{\tau_n}) - KX_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star\right]. \tag{3.9}$$

Mamy zatem następującą równość

$$\frac{K}{K-1}\frac{1}{e} = \mathbb{E}\left[X_{\tau_n}^\star - X_{\tau_n}\right] - \mathbb{E}\left[X_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star\right].$$

Zauważmy, że dla $y \geqslant \frac{1}{e}$ i $x \geqslant \bar{x}$ zachodzi $x\log y \geqslant \bar{x}\log y + \bar{x} - x$. Korzystając z nierówności $\frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star \geqslant \frac{1}{e}$ oraz $X_{\tau_n} \geqslant \frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star$ mamy

$$X_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star \geqslant \frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star\log\frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star + \frac{K-1}{K}X_{\tau_n}^\star - X_{\tau_n}.$$

Stąd

$$\frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e} \leqslant \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n} - (K-1)X^\star_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n}\right]. \tag{3.10}$$

Na mocy twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej wiemy, ze $\mathbb{E}X^\star_{\tau_n} \overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}X^\star_\tau$. Załóżmy, że $\mathbb{E}X^\star_\tau = \infty$ i niech $C_K = \frac{K}{K-1}\exp(\frac{2}{K-1})$. Wówczas

$$\mathbb{E}X^\star_{\tau_n} = \mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}} + \mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} \leqslant C_K\}} \leqslant \mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}} + C_K.$$

Stąd $\mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}} \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Dla $x > C_K$ zachodzi $(K-1)x\log\frac{K-1}{K}x > 2x$ oraz $(K-1)x\log\frac{K-1}{K}x \leqslant 2x$ dla $x \leqslant C_K$. Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e} &\leqslant \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n} - (K-1)X^\star_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n}\right]\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} \leqslant C_K\}} \\
&+\mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n} - (K-1)X^\star_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n}\right]\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}} \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n} + (K-1)|X^\star_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n}|\right]\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} \leqslant C_K\}} - \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}}\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n} + \left(2X^\star_{\tau_n} \vee \frac{K}{e}\right)\right]\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} \leqslant C_K\}} - \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}}\right] \\
&\leqslant 3C_K + \frac{K}{e} - \mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}}\right]
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E}\left[X^\star_{\tau_n}\mathbb{I}_{\{X^\star_{\tau_n} > C_K\}}\right] \leqslant 3C_K + \frac{K}{e} - \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e} < \infty.$$

To już jest sprzeczność, bo lewa strona nierówności dąży do nieskończoności przy $n \to \infty$. Zatem $\mathbb{E}X^\star_\tau < \infty$. Wiedząc, że $X^\star_\tau$ jest całkowalne, łatwo zauważyć, że również $\mathbb{E}X_\tau < \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_\tau$, ponieważ $X^\star_\tau$ jest całkowalną majorantą dla X_{τ_n} (korzystamy z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej).

Znajdę teraz całkowalną majorantę dla zmiennej $X_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n}$. Mamy

$$X_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n} \leqslant X^\star_{\tau_n}\left(\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n} + 1\right) \leqslant X^\star_\tau\log\frac{K-1}{K}X^\star_\tau + X^\star_\tau,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, ze wyrażenie $X^\star_{\tau_n}\left(\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n} + 1\right)$ jest rosnące z n. Wystarczy teraz pokazać, że $X^\star_\tau\log\frac{K-1}{K}X^\star_\tau$ jest całkowalne. Wynika to natychmiast z nierówności (3.10), która daje

$$\mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n} \leqslant \frac{1}{K-1}\mathbb{E}X^\star_{\tau_n}.$$

Formalnie, aby skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej należy napisać

$$\mathbb{E}X^\star_{\tau_n}\left(\log\frac{K-1}{K}X^\star_{\tau_n} + 1\right) \leqslant \left(\frac{1}{K-1} + 1\right)\mathbb{E}X^\star_{\tau_n},$$

bo dopiero teraz wyrażenie pod wartością oczekiwaną po lewej stronie nierówności jest rosnące z n. Przechodząc z n do nieskończoności dostajemy

$$\mathbb{E}X^\star_\tau\left(\log\frac{K-1}{K}X^\star_\tau + 1\right) \leqslant \left(\frac{1}{K-1} + 1\right)\mathbb{E}X^\star_\tau,$$

czyli

$$\mathbb{E}X_\tau^\star \log \frac{K-1}{K} X_\tau^\star \leqslant \frac{1}{K-1} \mathbb{E}X_\tau^\star < \infty.$$

Zatem stosując twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_{\tau_n} \log \frac{K-1}{K} X_{\tau_n}^\star \right) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n} \log \frac{K-1}{K} X_{\tau_n}^\star \right) = \mathbb{E}\left(X_\tau \log \frac{K-1}{K} X_\tau^\star \right).$$

Ostatecznie można więc przejść do granicy z n w równości (3.7) otrzymując

$$\mathbb{E}\left[U(X,\, X^\star)\right]_\tau = \mathbb{E}U(X_0,\, X_0^\star). \tag{3.11}$$

Łacząc równania (3.6), (3.8) i (3.11) dostajemy równanie (3.4), co kończy dowód. □

W Twierdzeniu 3.2 występuje warunek $K > 1$. Okazuje się, że jest to warunek konieczny dla zachodzenia nierówności (3.2). Mówi o tym kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3.4. *Dla $K \leqslant 1$ nierówność (3.2) nie zachodzi dla żadnej stałej L. Ściślej, jeżeli $K \leqslant 1$, to dla każdej stałej $L' > 0$ istnieje taki ciągły martyngał lokalny $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, że*

$$\mathbb{E}X^\star > K \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + L'.$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$.

Dowód. Pokażę, że nierówność nie zachodzi dla $K = 1$. Załóżmy, że jest przeciwnie i istnieje stała $L' > 0$ taka, że dla każdego ciągłego martyngału lokalnego $(X_t,\, \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ mamy

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + L'.$$

Wówczas dla $\varepsilon > 0$ zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^\star &\leqslant (1+\varepsilon) \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + \left(L' - \varepsilon \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| \right) \\
&\leqslant (1+\varepsilon) \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + \left(L' + \frac{\varepsilon}{e} \right),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ponieważ $\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau|$ jest ograniczone z dołu przez minimum funkcji $f(x) = x \log x$ dla $x \geqslant 0$ (równe $-\frac{1}{e}$). Na mocy Twierdzeń 3.2 i 3.3 wiemy, że

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant (1+\varepsilon) \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + L(1+\varepsilon),$$

gdzie $L(1+\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon} \frac{1}{e}$ jest optymalną stałą. Ponieważ $\lim_{\varepsilon\to 0} L(1+\varepsilon) = \infty$, to istnieje ε_0 takie, że $L(1+\varepsilon_0) > L' + \frac{\varepsilon_0}{e}$. Jednocześnie na mocy (3.12) zachodzi

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant (1+\varepsilon_0) \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau| \log |X_\tau| + \left(L' + \frac{\varepsilon_0}{e} \right),$$

co daje sprzeczność z optymalnością stałej $L(1+\varepsilon_0)$. Teraz załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $K<1$ ze stałą $L'>0$. Wówczas

$$\mathbb{E}X^\star \leqslant K \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + L' = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + \left(L' + (K-1)\sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau|\right)$$
$$\leqslant \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + (L' + \frac{1-K}{e}),$$

co daje sprzeczność z nie zachodzeniem nierówności dla $K=1$. □

Rozdział 4

Zastosowania

W tym rozdziale pokazuję dwa zastosowania nierówności udowodnionej w rozdziale 3. Pierwszy przykład polega na zastosowaniu nierówności ($\star$) do martyngału wykładniczego. Drugie zastosowanie dotyczy procesów Bessela.

4.1. Martyngał wykładniczy

Rozpoczniemy od technicznego lematu, który będzie użyteczny w dalszych dowodach.

Lemat 4.1. *Niech X będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie normalnym, $X \sim N(0,1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Wówczas $\mathbb{E}\exp(cX) = \exp(\frac{c^2}{2})$ oraz $\mathbb{E}X\exp(cX) = c\exp(\frac{c^2}{2})$.*

Dowód. Z definicji

$$\mathbb{E}\exp(cX) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp(cx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-c)^2 + \frac{c^2}{2}\right)\mathrm{dx} = \exp\left(\frac{c^2}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x\exp(cX) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\exp\left(-\frac{1}{2}(x-c)^2 + \frac{c^2}{2}\right)\mathrm{dx} = \exp\left(\frac{c^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(x+c)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{dx} \\ &= \exp\left(\frac{c^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} c\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{dx} = c\exp\left(\frac{c^2}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Dla każdego $\lambda > 0$ proces $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\geqslant 0}$, gdzie $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem Wienera, jest martyngałem względem naturalnej filtracji (generowanej przez proces Wienera). Rzeczywiście, dla dowolnych $t > s$ mamy ($Z \sim N(0,1)$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)|\mathcal{F}_s\right) &= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(W_t - W_s) + \lambda W_s)|\mathcal{F}_s\right) \\ = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp(\lambda W_s)\mathbb{E}\exp(\lambda(W_t - W_s)) &= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp(\lambda W_s)\mathbb{E}\exp(\lambda\sqrt{t-s}\,Z) \\ \overset{Lemat\ 4.1}{=} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t\right)\exp(\lambda W_s)\exp\left(\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) &= \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}s\right).\end{aligned}$$

Powyższa obserwacja pozwala nam sformułować następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4.1. *Dla dowolnych $\lambda > 0$, $t \geqslant 0$ i $K > 1$ zachodzi*

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right) \leqslant \frac{K\lambda^2}{2} t + \frac{K^2}{K-1} \frac{1}{e},$$

w szczególności

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right) \leqslant \lambda^2 t + \frac{4}{e}. \tag{4.1}$$

Dowód. Wiemy, że $(X_s)_{s \geqslant 0} = \left(\exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right)\right)_{s \geqslant 0}$ jest martyngałem, więc biorąc deterministyczny moment zatrzymania $\tau = t$ otrzymujemy martyngał $(X_{s \wedge t})_{s \geqslant 0}$. Martyngał ten jest oczywiście ciągły, nieujemny i całkowalny z kwadratem, a proste zastosowanie wzoru Itô pokazuje, że spełnia on również założenie $\mathbb{E}\langle X_{T \wedge t}\rangle^2 < \infty$ dla każdego $T \geqslant 0$. Stosujemy więc nierówność z punktu (2) Twierdzenia 3.1 otrzymując

$$\mathbb{E} \sup_{s \geqslant 0} X_{s \wedge t} \leqslant K \sup_{s \geqslant 0} \mathbb{E} X_{s \wedge t} \log X_{s \wedge t} + \frac{K^2}{K-1} \frac{1}{e}.$$

Oczywiście $\mathbb{E} \sup_{s \geqslant 0} X_{s \wedge t} = \mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} X_s$. Rozumowanie analogiczne do użytego w dowodzie Twierdzenia 3.3 (zastosowanie nierówności Jensena do nieujemnego martyngału $(X_{s \wedge t})_{s \geqslant 0}$ i funkcji wypukłej $F(x) = x \log x$) prowadzi do wniosku, że $(X_{s \wedge t} \log X_{s \wedge t})_{s \geqslant 0}$ jest podmartyngałem, a zatem $\sup_{s \geqslant 0} \mathbb{E} X_{s \wedge t} \log X_{s \wedge t} = \mathbb{E} X_t \log X_t$. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} X_t \log X_t &= \mathbb{E}\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right) \exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \left[\lambda \mathbb{E} W_t \exp(\lambda W_t) - \frac{\lambda^2}{2} t \mathbb{E} \exp(\lambda W_t)\right] \\
&\overset{\text{Lemat 4.1}}{=} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \left[\lambda^2 t \exp\left(\frac{\lambda^2 t}{2}\right) - \frac{\lambda^2}{2} t \exp\left(\frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right] = \frac{\lambda^2}{2} t.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right) \leqslant \frac{K\lambda^2}{2} t + \frac{K^2}{K-1} \frac{1}{e}.$$

Ponieważ nierówność zachodzi dla wszystkich $K > 1$, to mamy również

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right) \leqslant \inf_{K > 1} \left(\frac{K\lambda^2}{2} t + \frac{K^2}{K-1} \frac{1}{e}\right).$$

Wstawiając $K = 2$ otrzymujemy natomiast[1]

$$\mathbb{E} \sup_{s \leqslant t} \exp\left(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2} s\right) \leqslant \lambda^2 t + \frac{4}{e}.$$

□

[1] Można łatwo pokazać, że infimum jest przyjmowane dla $K = 1 + \sqrt{\frac{2}{2 + e\lambda^2 t}}$, ale otrzymane wówczas oszacowanie ma skomplikowaną postać.

4.2. Procesy Bessela

Zdefiniuję teraz klasę procesów Bessela. W tym celu wprowadzę najpierw klasę procesów $\mathrm{BESQ}^{\delta}(x)$.

Definicja 4.1. *Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie standardowym procesem Wienera. Dla każdej $\delta \geqslant 0$ i $x \geqslant 0$, (jedyne) rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego*

$$Z_t = x + 2\int\limits_0^t \sqrt{Z_s}dW_s + \delta t \tag{4.2}$$

nazywamy kwadratem procesu Bessela o wymiarze δ i startującym z x (ozn. $BESQ^{\delta}(x)$).

Aby upewnić się, że definicja jest poprawna, należy wykazać istnienie i jedyność rozwiązania oraz nieujemność procesu $(Z_t)_{t\geqslant 0}$. Zapisując równanie w nieco innej formie

$$dZ_t = \sigma(t,\, Z_t)dW_t + b(t,\, Z_t)dt,\; Z_0 = x,$$

gdzie $\sigma(t,\, x) = 2\sqrt{x}$ i $b(t,\, x) = \delta$, widać, że istnienie i jedyność rozwiązania wynika z odpowiednich twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania stochastycznego równania różniczkowego (zachodzi bowiem $|\sigma(s,\, x) - \sigma(s,\, y)|^2 \leqslant \rho(|x-y|)$, gdzie ρ jest funkcją borelowską z $(0,\infty)$ w siebie taką, że $\int_{0+}\frac{da}{\rho(a)} = \infty$ oraz funkcja b jest lipschitzowska - zobacz Twierdzenie 3.5 w rozdziale IX str. 390 w [Rev99]). Nieujemność rozwiązania wynika z faktu, że dla $\delta = x = 0$ jedynym rozwiązaniem (4.2) jest proces zerowy oraz dla dowolnych $\delta \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ zachodzi $x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}dW_s + \delta t \geqslant 0 + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}dW_s + 0$. Na mocy Twierdzenia 3.7 z rozdziału IX str. 394 w [Rev99] rozwiązanie $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ równania (4.2) spełnia zatem $\mathbb{P}\left(Z_t \geqslant 0 \text{ dla każdego } t \geqslant 0\right) = 1$, czyli proces jest nieujemny prawie na pewno.

Do dalszych rozważań przydatny będzie jeszcze następujący fakt z [Rev99].

Fakt 4.1. *Dla procesu $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ z klasy $BESQ^{\delta}(x)$, $\delta > 2$, $x > 0$, zbiór $\{0\}$ jest polarny, tzn. $\mathbb{P}(\exists t \geqslant 0\, Z_t = 0) = 0$.*

Po wprowadzeniu klasy $\mathrm{BESQ}^{\delta}(x)$, można zdefiniować klasę procesów Bessela.

Definicja 4.2. *Niech $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem z klasy $BESQ^{\delta}(a^2)$, $a \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$. Procesem Bessela o wymiarze δ i startującym z a nazywamy proces $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ dany wzorem $\rho_t = \sqrt{Z_t}$ dla każdego $t \geqslant 0$ (ozn. $BES^{\delta}(a)$).*

Dla $\delta > 2$ i $a > 0$ można podać odmienną charakteryzację procesu Bessela, będącą konsekwencją wzoru Itô.

Stwierdzenie 4.2. *Niech $(W_t)_{t\geqslant 0}$ będzie standardowym procesem Wienera. Dla $\delta > 2$ i $a > 0$ proces $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ z klasy $BES^{\delta}(a)$ jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego*

$$\rho_t = a + W_t + \frac{\delta - 1}{2}\int\limits_0^t \rho_s^{-1}ds. \tag{4.3}$$

Dowód. Dzięki uwadze poczynionej w Fakcie 4.1 możemy zastosować wzór Itô do procesu $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ z klasyBESQ$^{\delta}(a^2)$ i funkcji $F(x) = \sqrt{x}$. Zauważmy, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym semimartyngałem, proces $\left(2\int_0^t \sqrt{Z_s}dW_s\right)_{t\geqslant 0}$ jest jego częścią martyngałową oraz $\langle Z_t\rangle = \left\langle 2\int_0^t \sqrt{Z_s}dW_s\right\rangle = 4\int_0^t Z_s ds$. Stąd

$$\rho_t = \sqrt{Z_t} = a + \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\sqrt{Z_s}}\right) 2\sqrt{Z_s} dW_s + \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\sqrt{Z_s}}\right) \delta ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{Z_s\sqrt{Z_s}}\right) 4Z_s ds$$

$$= a + \int\limits_0^t dW_s + \frac{\delta - 1}{2}\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{Z_s}} ds = a + W_t + \frac{\delta - 1}{2}\int\limits_0^t \rho_s^{-1} ds.$$

□

Powyższe stwierdzenie jest rzeczywiście charakteryzacją procesów Bessela wymiaru $\delta > 2$, gdyż jedyność rozwiązania równania (4.3) wynika z Twierdzenia 3.5 w rozdziale IX str. 390 w [Rev99].

Dla $\delta \in \mathbb{N}$, $\delta \geqslant 2$, proces Bessela startujący z $a \geqslant 0$, ma bardziej intuicyjną postać, tzn. zachodzi następujący fakt będący kolejną prostą konsekwencją wzoru Itô i własności procesu Wienera[2].

Fakt 4.2. *Jeżeli $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Bessela startującym z $a \geqslant 0$ o wymiarze $\delta \in \{2, 3, 4, ...\}$, to $(\rho_t)_{t\geqslant 0} = (\|W_t - a\|)_{t\geqslant 0}$, gdzie $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest δ-wymiarowym procesem Wienera, tzn. $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, ..., W_t^{(\delta)})$ dla każdego $t \geqslant 0$, gdzie $(W_t^{(i)})_{t\geqslant 0}$, dla $i = 1, 2, ..., \delta$, są niezależnymi od siebie standardowymi procesami Wienera.*

Ostatnie stwierdzenie poprzedzające główny wynik tego rozdziału uzasadnia zastosowanie nierówności (3.2) do procesu Bessela, który podniesiony do odpowiedniej potęgi staje się lokalnym martyngałem.

Stwierdzenie 4.3. *Niech $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Bessela $BES^\delta(a)$ dla $\delta > 2$ i $a > 0$. Wówczas proces $(X_t)_{t\geqslant 0} = (\rho_t^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym względem naturalnej filtracji.*

Dowód. Korzystamy po raz kolejny ze wzoru Itô. Dzięki uwadze poczynionej w Fakcie 4.1 możemy zastosować go do funkcji $F(x) = x^{2-\delta}$ i ciągłego, nieujemnego semimartyngału $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$. Ponadto wykorzystujemy charakteryzację ze Stwierdzenia 4.2.

$$\rho_t^{2-\delta} = a^{2-\delta} + (2-\delta)\int\limits_0^t \rho_s^{1-\delta} dW_s + (2-\delta)\int\limits_0^t \rho_s^{1-\delta}\left(\frac{\delta-1}{2}\rho_s^{-1}\right) ds$$

$$+ \frac{1}{2}(2-\delta)(1-\delta)\int\limits_0^t \rho_s^{-\delta} ds = a^{2-\delta} + (2-\delta)\int\limits_0^t \rho_s^{1-\delta} dW_s. \quad (4.4)$$

Ponieważ proces $(\rho_t^{1-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest ciągły, to rzeczywiście $(\rho_t^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem lokalnym. □

Sformułujemy teraz główne stwierdzenie, będące wnioskiem z Twierdzenia 3.2.

Stwierdzenie 4.4. *Niech $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ będzie procesem Bessela $BES^\delta(a)$ dla $\delta > 2$ i $a > 0$. Niech τ będzie momentem zatrzymania względem filtracji generowanej przez $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ takim, że $\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \rho_s^{2-2\delta} ds\right)^2 < \infty$. Wówczas dla dowolnego $K > 1$ zachodzi*

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant\tau} \rho_t^{2-\delta} \leqslant K\mathbb{E}\rho_\tau^{2-\delta}\log\rho_\tau^{2-\delta} + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

[2]Zobacz [Rev99].

Dowód. Z Stwierdzenia 4.3 wiemy, że proces $(\rho_t^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym, zatem również $(\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest ciągłym martyngałem lokalnym. Pokażę, że $(\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest tak naprawdę martyngałem. Z równości (4.4) wiemy, że

$$\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta} = a^{2-\delta} + (2-\delta)\int\limits_0^{t\wedge\tau} \rho_s^{1-\delta} dW_s,$$

zatem z stwierdzenia o zatrzymaniu całki stochastycznej i z własności całki względem procesu Wienera wystarczy wykazać, że proces $(\rho_t^{1-\delta}\mathbb{I}_{[0,\,\tau]})_{t\geqslant 0}$ spełnia

$$\mathbb{E}\int\limits_0^{\infty} \left(\rho_s^{1-\delta}\mathbb{I}_{[0,\,\tau]}\right)^2 ds < \infty,$$

czyli

$$\mathbb{E}\int\limits_0^{\tau} \rho_s^{2-2\delta} ds < \infty,$$

to zaś jest prawdą na mocy założenia. Wiedząc, że $(\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest nieujemnym martyngałem, który spełnia założenia punktu (2) Twierdzenia 3.1[3] otrzymujemy

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta} \leqslant K\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta}\log\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta} + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Możemy teraz powtórzyć rozumowanie z dowodu Stwierdzenia 4.1 (użycie nierówności Jensena) i wywnioskować, że $(\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta}\log\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest podmartyngałem, w związku z czym $\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta}\log\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta} = \mathbb{E}\rho_{\tau}^{2-\delta}\log\rho_{\tau}^{2-\delta}$. To kończy dowód stwierdzenia. □

Zauważmy, że teza powyższego stwierdzenia zachodzi w szczególności dla momentów zatrzymania, które są ograniczone p.n.. Np. biorąc $\tau = t$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}\sup_{s\leqslant t}\rho_s^{2-\delta} \leqslant K\mathbb{E}\rho_t^{2-\delta}\log\rho_t^{2-\delta} + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}.$$

Wyrażenie po prawej stronie nierówności można ponadto zoptymalizować po wszystkich $K > 1$, zatem teza Stwierdzenia 4.4 mogłaby wyglądać następująco

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant\tau}\rho_t^{2-\delta} \leqslant \inf_{K>1}\left[K\mathbb{E}\rho_{\tau}^{2-\delta}\log\rho_{\tau}^{2-\delta} + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}\right]. \tag{4.5}$$

[3]Mamy bowiem $\langle\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta}\rangle^2 = (2-\delta)^4\left(\int_0^{t\wedge\tau}\rho_s^{2-2\delta}ds\right)^2$, co jest całkowalne na mocy założenia.

Podsumowanie

W pracy przedstawiłem metodę funkcji specjalnych Burkholdera i udowodniłem przy jej wykorzystaniu nierówność $(\star)$ dla procesu $(X_t,\ \mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ będącego nieujemnym i ciągłym podmartyngałem lub martyngałem lokalnym:

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t| \leqslant K\sup_{\tau\in\mathcal{T}}\mathbb{E}|X_\tau|\log|X_\tau| + L(K), \tag{$\star$}$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem wszystkich ograniczonych momentów zatrzymania adaptowalnych do filtracji generowanej przez proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Jeżeli proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$ jest nieujemnym i ciągłym martyngałem całkowalnym z kwadratem takim, że dla każdego $t \geqslant 0$ zachodzi $\mathbb{E}\langle X_t\rangle^2 < \infty$, to ponadto

$$\mathbb{E}\sup_{t\geqslant 0}|X_t| \leqslant K\sup_{t\geqslant 0}\mathbb{E}|X_t|\log|X_t| + L(K).$$

Pokazałem również, że nierówność nie zachodzi dla $K \leqslant 1$ oraz że dla każdego $K > 1$ stała $L(K) = \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}$ jest optymalna.

Zaprezentowałem następnie dwa zastosowania nierówności $(\star)$. Pierwszy przykład dotyczy martyngału wykładniczego $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\geqslant 0}$ dla $\lambda > 0$. Dla dowolnego $t \geqslant 0$ prawdziwa jest nierówność (4.1)

$$\mathbb{E}\sup_{s\leqslant t}\exp(\lambda W_s - \frac{\lambda^2}{2}s) \leqslant \lambda^2 t + \frac{4}{e}.$$

W ramach drugiego przykładu zdefiniowałem proces Bessela $(\rho_t)_{t\geqslant 0}$ o wymiarze $\delta \geqslant 0$ startujący z $a \geqslant 0$ i pokazałem, że dla $\delta > 2$, $a > 0$ i momentu zatrzymania τ takiego, że $\mathbb{E}\left(\int_0^\tau \rho_s^{2-2\delta}ds\right)^2 < \infty$, proces $(\rho_{t\wedge\tau}^{2-\delta})_{t\geqslant 0}$ jest martyngałem i zachodzi nierówność (4.5)

$$\mathbb{E}\sup_{t\leqslant\tau}\rho_t^{2-\delta} \leqslant \inf_{K>1}\left[K\mathbb{E}\rho_\tau^{2-\delta}\log\rho_\tau^{2-\delta} + \frac{K^2}{K-1}\frac{1}{e}\right].$$

Bibliografia

[Bur91] Burkholder, D. L., *Explorations in martingale theory and its applications*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989, 1-66, Lecture Notes in Math., 1464, Springer,

[Doo53] Doob, J. L., *Stochastic processes*, John Wiley & Sons, 1993

[Kar91] Karatzas, I., Shreve, S. E., *Brownian motion and stochastic calculus*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[Lat11] Latała, R., *Wstęp do analizy stochastycznej*, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, 2011

[Rev99] Revuz, D., Yor, M., *Continuous martingales and Brownian Motion*, Third Edition, Springer, Berlin, 1999